第 39 卷 第 6 期
2022 年 12 月

应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 39 No. 6
Dec. 2022

文章编号:1000-4939(2022)06-1158-10

基于 XFEM 与 BP 神经网络的裂纹智能识别

毛晓敏,张慧华,纪晓磊,韩尚宇

(南昌航空大学土木建筑学院,330063 南昌)

摘 要:数值技术与智能算法的飞速发展为结构内部缺陷的识别提供了新途径。本研究建立了扩展有限元法(XFEM)与误差反向传播多层前馈(BP)神经网络相结合的裂纹反演分析模型。模型通过 XFEM 正向分析获得的测点位移数据训练 BP 神经网络,在此基础上利用该网络进行裂纹反向识别。通过 2 个典型算例验证了模型的可行性和精度,结果表明本研究的方法能够准确反演裂纹的几何信息,与此同时还探讨了测点布置方式及输入数据噪声等因素对识别精度的影响。

关键词:扩展有限元法;BP 神经网络;裂纹;反演分析

中图分类号:O34 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2022.06.017

Intelligent crack identification based on XFEM and BP neural network

MAO Xiaomin,ZHANG Huihua,JI Xiaolei,HAN Shangyu

(School of Civil Engineering and Architecture,Nanchang Hangkong University,330063 Nanchang,China)

Abstract:The rapid development of numerical technology and intelligent algorithm provides a new way to identify the internal defects of structures. In this paper,an inverse analysis model for crack detection is established by combining extended finite element method (XFEM) and error-back-propagation multilayer feedforward (BP) neural network. The BP neural network is trained by the displacement data obtained from the forward analysis of XFEM. On this basis,the network is used for the inverse identification of cracks. The feasibility and accuracy of the model are verified by two typical examples. The results show that the proposed method can accurately retrieve the geometric information of cracks. At the same time,the influence of the layout of measuring points and the input data noise on the identification accuracy is also discussed.

Key words:extended finite element method; BP neural network; crack; inverse analysis

各类工程结构因施工质量、外加荷载以及温度变化等诸多因素的影响,难免存在裂纹和孔洞等缺陷。作为代表性的一类缺陷,裂纹的存在将导致结构的承载力下降、适用性和耐久性退化,而裂纹的不断演化甚至可能会引起建筑物垮塌等更为严重的后果,危及生命财产安全。因此,对裂纹进行快速、准确的检测识别具有十分重要的意义。

裂纹识别属于典型的反分析问题。反分析是基

收稿日期:2021-05-06 **修回日期**:2021-08-13
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 12062015);江西省自然科学基金资助项目(No. 20192BAB202001)
通信作者:张慧华,教授。E-mail: hhzhang@nchu.edu.cn
引用格式:毛晓敏,张慧华,纪晓磊,等. 基于 XFEM 与 BP 神经网络的裂纹智能识别[J]. 应用力学学报,2022,39(6):1158-1167.
MAO Xiaomin, ZHANG Huihua, JI Xiaolei,et al. Intelligent crack identification based on XFEM and BP neural network[J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(6):1158-1167.

于相关的测试数据,通过建立有效的反演分析模型,在不破坏结构本身的前提下识别出裂纹的位置、尺寸和类型等参数。目前较为常见的裂纹识别方法主要包括图像识别法和无损检测技术等,但这些方法存在着一些局限性,比如,图像识别法易受环境影响、无损检测技术费用较为昂贵等。近年来,数值技术与人工智能的发展为裂纹检测识别提供了一条新途径,此类方法具有高效率、高精度、低成本和适用性强等特点。

基于数值技术和人工智能算法进行裂纹反演包括正向分析和目标极小化两个部分。正向分析主要通过数值方法获取含裂纹结构中测点的响应值(如位移)。代表性的数值方法包括有限元法[1]、边界元法[2]、无网格法[3]和扩展有限元法[4](extended finite element method,XFEM)等。XFEM 模拟裂纹问题的主要优势有:①网格不须与裂纹一致,可在保持网格不变的情况下对不同裂纹构型进行求解,因此可高效率获取反分析需要的测点数据;②通过引入改进函数可准确表征跨越裂纹面时位移的不连续性和裂尖的奇异性,可在较稀疏的网格上获得高精度的解答,因此能满足反演类问题对粗网格高精度的要求[5]。至今,XFEM 已被应用于求解诸多裂纹问题[6-7]。目标极小化主要通过智能优化算法来实现,常见的智能优化算法有遗传算法[8](genetic algorithm,GA)、人工蜂群算法[9](artificial bee colony algorithm,ABC)和各类人工神经网络算法(如多层前馈(BP)神经网络、卷积神经网络[10]、小波神经网络[11])等。

近几年来已有许多学者结合 XFEM 与智能优化算法进行缺陷反演。文献[12]提出了一种基于 XFEM 和 GA 的检测算法。文献[13]基于 XFEM 和 GA 算法通过获取输入信号到达测点的时间信息来识别结构中的裂纹。此外,文献[14]建立了 XFEM 与 GA 相结合的缺陷反演分析模型。文献[15]结合 XFEM 和 ABC 算法建立了结构内部缺陷(夹杂)及裂纹的反演分析模型。文献[16]基于 XFEM 和改进 ABC 算法对结构中多个缺陷进行了检测和量化。文献[17]提出了一种基于动态 XFEM 和改进 ABC 的多缺陷检测法。

如上所述,基于 XFEM 和智能优化算法(如 GA 和 ABC)开展结构缺陷反演识别的研究工作已有不少。GA 适用于复杂的优化问题、可获取全局最优解且算法独立于求解域,但存在收敛速度慢、局部搜索能力差和控制变量多等问题;ABC 采用多角色分工和协同工作机制,搜索精度较高、鲁棒性较强,但易限于局部最优解且易产生中间停滞问题。作为当前应用最为广泛的神经网络模型之一,BP 神经网络具有强大的非线性映射能力、自学习和自适应能力、泛化能力、容错能力,以及结构简单、工作状态稳定、易于硬件实现等优点[18]。考虑到 XFEM 模拟裂纹问题的优势、BP 神经网络的特点以及尚未见两者在裂纹识别方面的协同研究,本研究将 XFEM 与 BP 神经网络算法进行有机结合开展裂纹反演分析,在验证模型可行性和精度基础上,细致探讨测点布置和输入数据噪声等因素对预测结果的影响,为工程结构中裂纹的快速准确识别提供一定的理论和技术支撑。

1　反分析模型简介

对正问题,一般是在给定材料类型、几何构型和边界条件等情况下,通过求解控制微分方程获取结构的位移、应力和应变等响应量。而对于反问题,则是通过已知结构中某些关键点(即测点)的位移等响应量,运用相关方法来反演与该结构相关的一些未知特性(如材料参数、几何特性和荷载类型等)。以裂纹识别问题为例,其主要目的是通过测点的响应量来反推裂纹的构型(如长度、角度、数量和位置等)。据此,对图 1 给出的单一裂纹的识别问题,待反演的参数向量为

$$\boldsymbol{\alpha} = \{X_{c1}, Y_{c1}, X_{c2}, Y_{c2}\} \tag{1}$$

式中:(X_{c1}, Y_{c1})和(X_{c2}, Y_{c2})分别为裂纹起点和终点的坐标,两裂尖均需在结构体范围内。

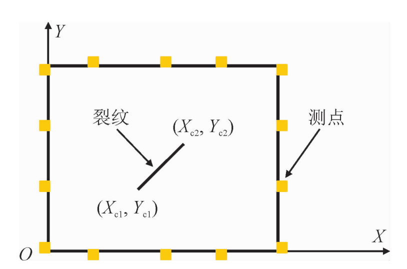


图 1　含单裂纹结构及测点示意图

Fig. 1　Schematic diagram of structure with a single crack and the measuring points

相应的目标函数为[15]

$$O(\boldsymbol{\alpha}) = \sum \frac{\| u^c(\boldsymbol{\alpha}) - u^f \|}{\| u^f \|} \tag{2}$$

式中:u^c 为由反演算法得到的测点(参见图 1)的响应量估计值;u^f 为响应量的真实值。

据此,裂纹反演分析的主要目的是通过相关方法,在给定的结构体范围内,获取最优的参数向量 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} = \{\widetilde{X}_{c1}, \widetilde{Y}_{c1}, \widetilde{X}_{c2}, \widetilde{Y}_{c2}\}$使得式(2)最小化。

2 扩展有限元法

2.1 裂纹问题的位移逼近

扩展有限元法[4]由美国西北大学 Belytschko 教授在 1999 年提出,是在标准有限元法(FEM)的基础上发展起来的一种新型数值方法。该方法继承了 FEM 的优点,但又具有独特的优势,特别适用于求解如夹杂和裂纹等不连续问题。通过在 FEM 的框架内引入表征裂面位移不连续性的跳跃函数和表征裂尖应力场奇异性的裂尖渐近基函数,对单元插值函数进行改进。XFEM 在模拟裂纹问题时不要求网格与裂纹面一致,也不需要使用裂尖奇异单元,且在较稀疏的网格下可获得高求解精度。

对各向同性材料中的裂纹问题,XFEM 的位移逼近可表示为[19]

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(\boldsymbol{X})\boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{N_{e1}} N_j(\boldsymbol{X})H_j(\boldsymbol{X})\boldsymbol{a}_j + \sum_{k=1}^{N_{e2}} N_k(\boldsymbol{X}) \sum_{q=1}^{4} \boldsymbol{\Phi}_k^q(\boldsymbol{X})\boldsymbol{b}_k^q \qquad (3)$$

式中:$\boldsymbol{X} = (X,Y)$、$N_i(\boldsymbol{X})$,$H_j(\boldsymbol{X})$和 $\boldsymbol{\Phi}_k^q(\boldsymbol{X})$ $(q=1\sim4)$分别为与结点 i、j、k 有关的单元形状函数、裂面改进函数和裂尖改进函数;N_n、N_{e1} 和 N_{e2} 分别表示单元内的常规结点、裂面改进结点和裂尖改进结点的数目;$\boldsymbol{u}_i$、$\boldsymbol{a}_j$、$\boldsymbol{b}_k^q$ 分别代表常规自由度、裂面改进自由度和裂尖改进自由度。

$H_j(\boldsymbol{X})$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_k^q(\boldsymbol{X})$ 的具体形式为

$$H_j(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1 & \varphi(\boldsymbol{X},0) > 0 \\ -1 & \varphi(\boldsymbol{X},0) < 0 \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}_k^1 = \sqrt{r}\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \boldsymbol{\Phi}_k^2 = \sqrt{r}\cos\dfrac{\theta}{2} \\ \boldsymbol{\Phi}_k^3 = \sqrt{r}\sin\theta\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \boldsymbol{\Phi}_k^4 = \sqrt{r}\sin\theta\cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases} \qquad (5)$$

式中:$\varphi(\boldsymbol{X},0)$为裂面水平集函数[19];$r$ 和 θ 为裂尖局部极坐标。

结点类型的确定方式可参考图 2。具体来说,对于被裂纹部分切割的单元,这些单元的结点均为裂尖改进结点;对于被裂纹完全切割的单元,除属于裂尖改进结点以外的结点均为裂面改进结点;除去改进结点后的剩余结点则为常规结点。

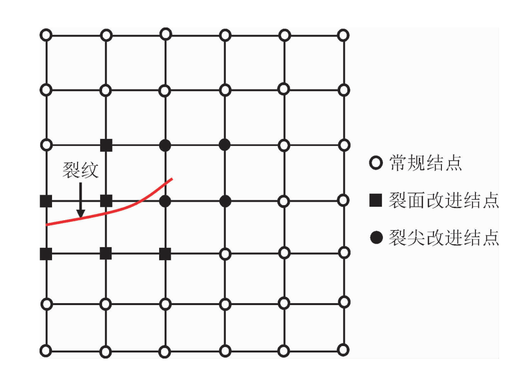


图 2 XFEM 结点类型的确定

Fig. 2 Determination of XFEM node type

2.2 离散方程的建立

将式(3)中的位移近似函数代入虚功方程,可得到 XFEM 求解裂纹问题的总体离散方程[20],即

$$\boldsymbol{Kd} = \boldsymbol{F} \qquad (6)$$

式中:$\boldsymbol{d}$ 为结点未知量矩阵;$\boldsymbol{K}$ 为整体刚度矩阵,由单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e$ 集成得到,即

$$\boldsymbol{K}_{ij}^e = \begin{pmatrix} k_{ij}^{uu} & k_{ij}^{ua} & k_{ij}^{ub} \\ k_{ij}^{au} & k_{ij}^{aa} & k_{ij}^{ab} \\ k_{ij}^{bu} & k_{ij}^{ba} & k_{ij}^{bb} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

式中

$$k_{ij}^{rs} = \int_\Omega (\boldsymbol{B}_i^r)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_j^s \mathrm{d}\Omega \quad (r,s = \boldsymbol{u},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \qquad (8)$$

式中:$\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵;$\boldsymbol{B}_i^r$ $(r = \boldsymbol{u},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$的具体形式为

$$\boldsymbol{B}_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,X} & 0 \\ 0 & N_{i,Y} \\ N_{i,Y} & N_{i,X} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_i^a = \begin{bmatrix} (N_iH_i)_{,X} & 0 \\ 0 & (N_iH_i)_{,Y} \\ (N_iH_i)_{,Y} & (N_iH_i)_{,X} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

$$\boldsymbol{B}_i^b = \begin{bmatrix} (N_i\boldsymbol{\Phi}_i^q)_{,X} & 0 \\ 0 & (N_i\boldsymbol{\Phi}_i^q)_{,Y} \\ (N_i\boldsymbol{\Phi}_i^q)_{,Y} & (N_i\boldsymbol{\Phi}_i^q)_{,X} \end{bmatrix} (q = 1\sim4)$$

$\boldsymbol{F}$ 为等效结点荷载向量,由各单元等效结点荷载集合 $\boldsymbol{F}^e$ 而成,具体形式为

$$\boldsymbol{F}^e = [\boldsymbol{f}_i^u, \boldsymbol{f}_i^a, \boldsymbol{f}_i^{b1}, \boldsymbol{f}_i^{b2}, \boldsymbol{f}_i^{b3}, \boldsymbol{f}_i^{b4}]^{\mathrm{T}} \qquad (10)$$

式中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_i^{u} &= \int_{\Gamma_t} N_i \boldsymbol{f}_t \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} N_i \boldsymbol{f}_b \mathrm{d}\Omega \\
\boldsymbol{f}_i^{a} &= \int_{\Gamma_t} N_i H_i \boldsymbol{f}_t \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} N_i H_i \boldsymbol{f}_b \mathrm{d}\Omega \\
\boldsymbol{f}_i^{bq}\big|_{q=1\sim4} &= \int_{\Gamma_t} N_i \Phi_i^q \boldsymbol{f}_t \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} N_i \Phi_i^q \boldsymbol{f}_b \mathrm{d}\Omega
\end{aligned}
\tag{11}
$$

式中：Ω，Γ_t 分别表示单元 e 对应的离散域、外力边界；$\boldsymbol{f}_t$ 和 $\boldsymbol{f}_b$ 分别为外力和体力。

3　BP 神经网络

3.1　BP 神经网络的架构

BP 神经网络由 Rumelhart 和 Mccelland 的科学小组提出，是一种信号前向传播、误差反向传递的多层前馈网络[18]。它主要由一个输入层、一个或多个隐藏层以及一个输出层构成。每一层上的神经元都通过权值与邻层上的各神经元相互连接，而同一层的神经元之间相互独立。隐藏层和输出层上的各个神经元都对应于一个激活函数和一个阈值；输入层上的神经元其阈值为零，其输出等于输入。BP 神经网络中，输入与输出的关系是一个高度非线性映射关系，如果输入节点数为 n，输出节点数为 q，则网络是从 n 维欧氏空间到 q 维欧氏空间的映射。这一映射是非线性的，难以用某个数学表达式具体表现。隐藏层的个数常由经验公式得到[21]，即

$$H_{\mathrm{num}} = \sqrt{I_{\mathrm{num}} + O_{\mathrm{num}}} + C \tag{12}$$

式中：H_{num}、I_{num} 和 O_{num} 分别为隐藏层、输入层和输出层的神经元个数；C 为 1～10 的常数。

图 3 给出了一个典型的三层 BP 神经网络，图 4 示例了对应的隐藏层神经元模型，此外，输出层的神经元模型与图 4 的类似。

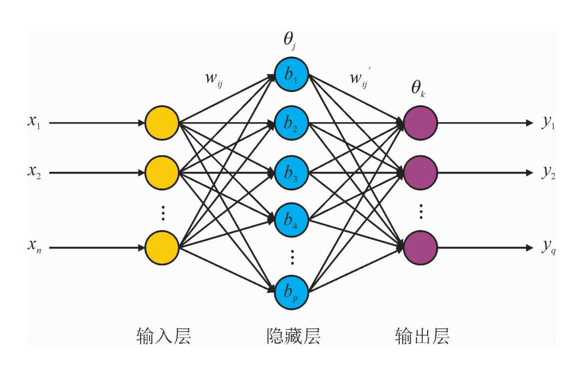


图 3　BP 神经网络的结构模型

Fig. 3　Structure of BP neural network

每个神经元（如神经元 j）接收其他神经元（如神经元 i）的信息传递，对神经元 j 来说，总输入为

$$b_j = f\left(\sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_i - \theta_j\right) \tag{13}$$

式中：w_{ij} 为神经元 i 和神经元 j 的结合强度，称为接连权值；x_i 为输入信号；θ_j 为神经元 j 的偏差（阈值）；$f(\cdot)$ 为激活函数；b_j 为神经元输出信号。

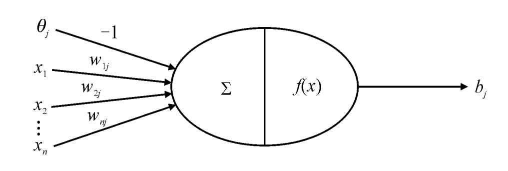


图 4　隐藏层的神经元模型

Fig. 4　Neuron model of hidden layer

由图 4 和式（13）可知，人工神经元可以看成由一组连接、一个加法器、一个激活函数 3 种基本元素组成。目前用的最多的激活函数是单极性 Sigmoid 函数[18]，即

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}} \tag{14}$$

3.2　BP 神经网络的学习方法

BP 神经网络的训练过程主要包括以下几个步骤[22]。

1）网络初始化

①确定输入向量：$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$（$n$ 为输入层神经元个数）。

②确定输出向量 $\boldsymbol{y}$ 和期望输出向量 $\boldsymbol{o}$，即 $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_q]^{\mathrm{T}}$（$q$ 为输出层神经元个数）；$\boldsymbol{o} = [o_1, o_2, \cdots, o_q]^{\mathrm{T}}$。

③确定隐藏层输出向量：$\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_p]^{\mathrm{T}}$（$p$ 为隐藏层神经元个数）。

④初始化输入层至隐藏层的连接权值 $\boldsymbol{w}_{ij} = [w_{1j}, w_{2j}, \cdots, w_{tj}, \cdots, w_{nj}]^{\mathrm{T}}$，$j = 1, 2, \cdots, p$。

⑤初始化隐藏层至输出层的连接权值 $\boldsymbol{w}_{jk}' = [w_{1k}', w_{2k}', \cdots, w_{tk}', \cdots, w_{pk}']^{\mathrm{T}}$，$k = 1, 2, \cdots, q$。

2）隐藏层输出 b_j 的计算

①计算隐藏层各神经元的激活值 s_j，即

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_i - \theta_j, (j = 1, 2, \cdots, p) \tag{15}$$

②计算隐藏层 j 单元的输出值。将式（15）的激活值代入激活函数式（14）中，可得隐藏层 j 单元的输出值为

$$b_j = f(s_j) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{(-\sum_{i=1}^{n} w_{ij}x_i + \theta_j)}},(j = 1,2,\cdots,p) \tag{16}$$

式中:w_{ij} 为输入层至隐藏层的权值;θ_j 为隐藏层单元的阈值。

3)输出层输出 y_k 的计算

①计算输出层各神经元的激活值 s_k,即

$$s_k = \sum_{j=1}^{p} w'_{jk}b_j - \theta_k,(k = 1,2,\cdots,q) \tag{17}$$

②计算输出层 k 单元的实际输出值 y_k,即

$$y_k = f(s_k) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{(-\sum_{j=1}^{p} w'_{jk}b_j + \theta_k)}},(k = 1,2,\cdots,q) \tag{18}$$

式中:w'_{jk} 为隐藏层至输出层的权值;θ_k 为输出层单元的阈值。

4)判断算法是否迭代结束

判断网络输出 y_k 与期望输出 o_k 之间的误差是否满足精度要求。若满足,则网络迭代结束;若不满足,则利用步骤 5)和 6)更新权值和阈值,然后通过式(15)~(18)重新计算网络输出值并与期望值进行比较,依此循环直至达到精度要求。

5)权值更新

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \eta[(1-\beta)D(t) + \beta D(t-1)],\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{19}$$

$$w'_{jk}(t+1) = w'_{jk}(t) + \eta[(1-\beta)D'(t) + \beta D'(t-1)],\ (j=1,2,\cdots,p) \tag{20}$$

式中:η 为学习速率,且 $\eta > 0$;$D(t) = -\partial J/\partial w_{ij}(t)$,$D'(t) = -\partial J/\partial w'_{jk}(t)$;$\beta$ 为动量因子,且 $0 \leq \beta < 1$。

6)阈值更新

根据网络输出 y_k 与期望输出 o_k 之间的误差,分别更新 θ_j 和 θ_k。

$$\theta_j(t+1) = \theta_j(t) + \eta b_j(1-b_j)\sum_{k=1}^{q} w'_{jk}(o_k - y_k) \tag{21}$$

$$\theta_k(t+1) = \theta_k(t) + (o_k - y_k) \tag{22}$$

4 XFEM-BP 神经网络方法的实现

本研究结合 XFEM 与 BP 神经网络算法进行裂纹反演分析。该方法主要包括两部分:第一部分是运用 XFEM 进行正向分析以获取测点的位移响应量,另一部分则是利用测点位移数据对 BP 神经网络进行训练并据此识别裂纹几何参数。方法的主要实现流程如图 5 所示。

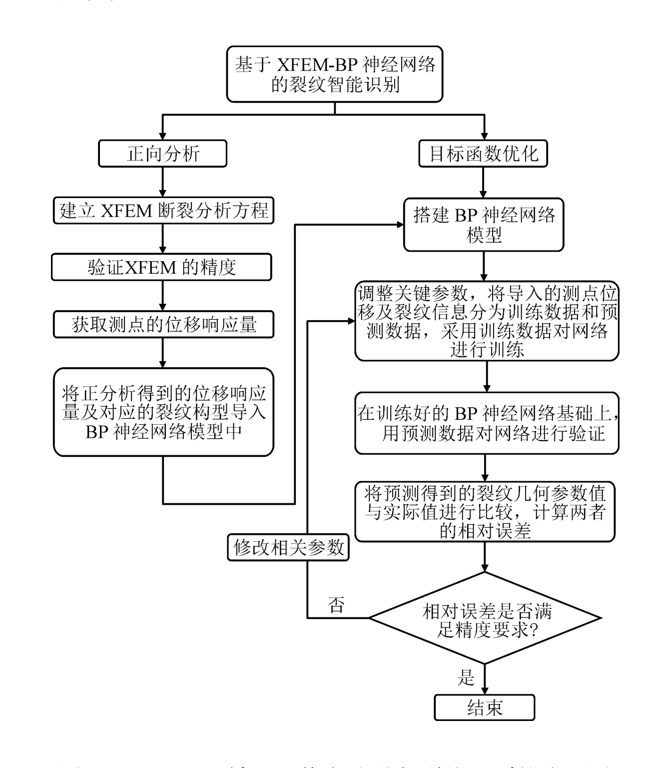


图 5 XFEM-BP 神经网络方法进行裂纹识别的流程图

Fig. 5 Flow chart of crackdetection with XFEM-BP neural network method

5 算例分析

本节选取 2 个典型的裂纹识别算例(单边裂纹和中心斜裂纹)对提出的方法进行考察。为保证 BP 神经网络输入数据的可靠性,首先对 XFEM 正向分析的精度进行验证;在此基础上,进一步探讨测点分布情况和输入数据噪声对 BP 神经网络预测结果的影响。

5.1 矩形板内的单边水平裂纹识别

如图 6 所示,矩形板高 $H = 6$ m,宽 $W = 2$ m,板左侧在距板上边缘 $H/2$ 处有一长度为 a 的单边水平裂纹。板顶部受到 $\sigma = 1$ MPa 的拉应力作用,板底边的竖向位移和底边左端的水平位移均为零。杨氏模量 $E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa,泊松比 $\nu = 0.3$,按平面应变进行分析。

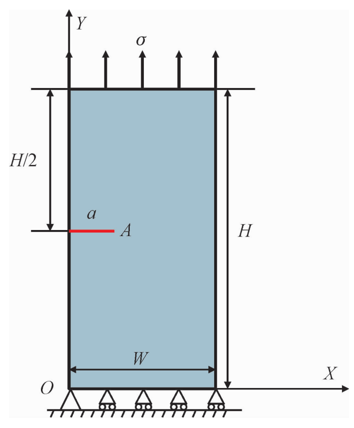


图 6　单向拉伸作用下含单边裂纹的矩形板

Fig. 6　A rectangular plate with an edge crack under uniaxial tension

5.1.1　XFEM 精度验证

对裂纹的正向分析问题，一般通过校核断裂参数的求解精度来测试方法的可行性。因此，此处主要考察应力强度因子的 XFEM 仿真精度。根据文献[23]，当 $H/W\geqslant 1$ 且 $a/W\leqslant 0.6$ 时，裂尖应力强度因子 K_{I} 的计算公式为

$$K_{\mathrm{I}} = F\sigma\sqrt{\pi a} \tag{23}$$

式中

$$F = 1.12 - 0.23\left(\frac{a}{W}\right) + 10.6\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21.71\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 30.38\left(\frac{a}{W}\right)^4 \tag{24}$$

XFEM 模拟时，采用交互积分方法[19]计算 K_{I}。

1）收敛性测试

取裂纹长度为 0.5 m，分别基于 3 种由 4 结点矩形单元组成的网格进行模拟（单元数量分别为 120，435 和 780，相应的离散域见图 7）。XFEM 仿真得到的 K_{I} 及对应的参考解列于表 1。可以看出，随着网格的加密，XFEM 解逐渐趋于参考解，很好地展示了方法的收敛性。

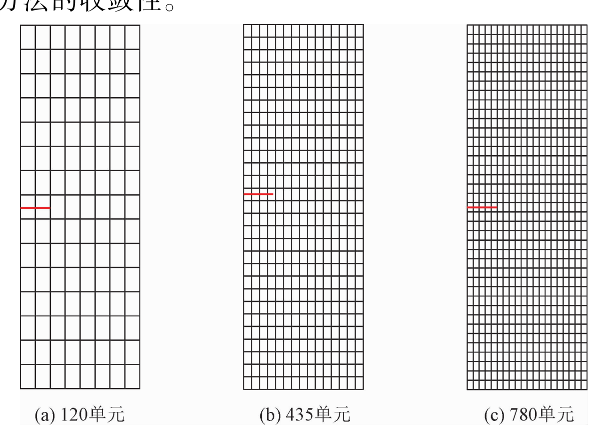


图 7　XFEM 网格

Fig. 7　XFEM mesh

表 1　不同网格下的 K_{I}（单位：$\mathrm{MPa\cdot m^{1/2}}$）

Tab. 1　K_{I} at different meshes (unit: $\mathrm{MPa\cdot m^{1/2}}$)

XFEM 解			参考解
120 单元	435 单元	780 单元	（式(23)）
1.772 4	1.826 2	1.856 3	1.885 6

2）裂纹长度取不同值时的计算精度

裂纹长度分别取 0.5、0.6、0.7、…1.2 m，并统一采用图 7（c）的网格。图 8 给出了 XFEM 的结果及相应的参考解，可以看出 XFEM 仿真值与参考解非常吻合，表明 XFEM 模拟具有良好的精度。

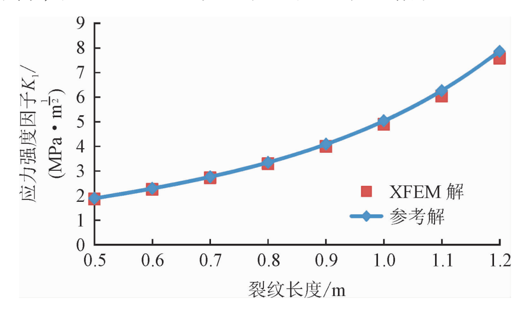


图 8　K_{I} 随裂纹长度的变化

Fig. 8　Variation of K_{I} with crack length

5.1.2　BP 神经网络的训练和预测结果

1）网络的训练

BP 神经网络训练时，采用测点位移作为输入数据，将裂尖 A 的 X 坐标（即 X_A）作为输出数据。测点的位移通过在裂尖位置已知的情况下采用 XFEM 正向分析获得。为此，利用 XFEM 并基于图 7（c）的网格先后对裂纹长度取 0.5、0.6、0.7、…1.4 m 等 10 种情况进行模拟。首先按图 9（a）的方式布置 14 个测点，各测点的坐标值列于表 2，因此输入层和输出层的神经元数分别为 14 个和 1 个，参照公式（12），隐藏层数量取为 4。为初步判断网络的学习效果，首先采用已有训练数据对网络进行测试，相关结果列于表 3。可以看出，对 10 种给定的裂纹，预测误差均在 1% 以内，表明搭建的网络具有良好的自学习性。

表 2　测点坐标

Tab. 2　Coordinates of measuring points

编号	X 坐标	Y 坐标	编号	X 坐标	Y 坐标
1	0.000 0	0.769 2	8	1.300 0	6.000 0
2	0.000 0	1.538 5	9	2.000 0	5.230 8
3	0.000 0	2.307 7	10	2.000 0	4.461 5
4	0.000 0	3.692 3	11	2.000 0	3.692 3
5	0.000 0	4.461 5	12	2.000 0	2.307 7
6	0.000 0	5.230 8	13	2.000 0	1.538 5
7	0.700 0	6.000 0	14	2.000 0	0.769 2

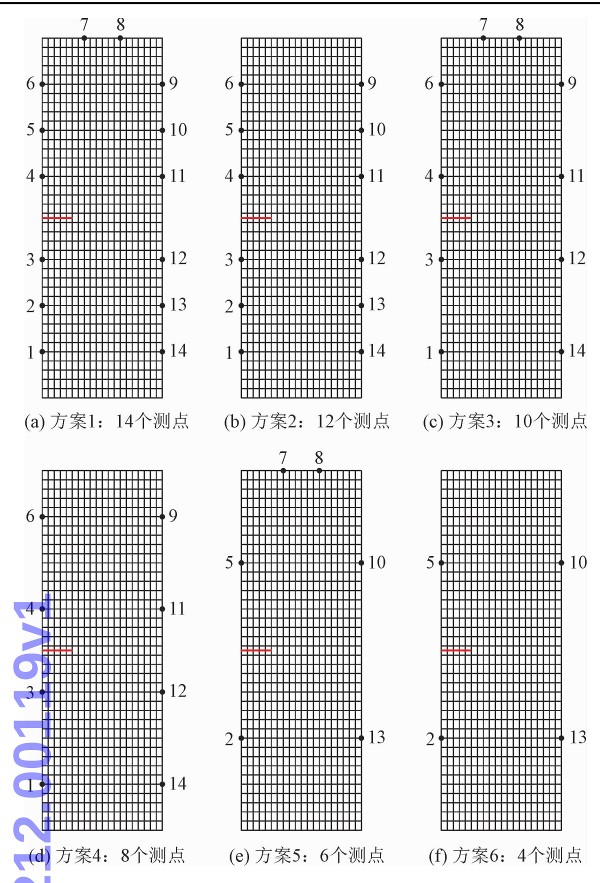


图 9 测点布置方案

Fig. 9 Layout of measuring points

表 3 BP 神经网络对 X_A 的训练输出结果

Tab. 3 Training results of BP neural network for X_A

裂纹长度/m	目标 X_A	训练输出 X_A	相对误差/%
0.5	0.500 0	0.500 4	0.077
0.6	0.600 0	0.600 3	0.042
0.7	0.700 0	0.700 0	0.007
0.8	0.800 0	0.800 0	0.006
0.9	0.900 0	0.900 1	0.011
1.0	1.000 0	1.000 3	0.035
1.1	1.100 0	1.100 4	0.032
1.2	1.200 0	1.200 0	0.000
1.3	1.300 0	1.299 9	0.004
1.4	1.400 0	1.399 9	0.008

2) 网络的预测精度

裂纹长度先后取 0.5、0.6、0.7…1.4、1.5 m 等 11 种情况，对每种情形，分别基于 XFEM 并按图 9 所示的 6 种测点布置方案获取对应的位移值。网络搭建时，采用 $a=0.5$ m，0.6 m，0.7 m，…，1.4 m 等 10 种情形对应的结果作为训练数据，并将据此搭建好的 BP 神经网络用于裂尖坐标预测，即将 $a=1.5$ m 时的测点位移值作为网络的输入数据以预测 X_A。相关结果列于表 4。

表 4 BP 神经网络的预测输出和相对误差

Tab. 4 Prediction and relative error of BP neural network

测点布置方案	测点数量	隐藏层神经元数量	目标 X_A	预测 X_A	相对误差/%
1	14	4	1.500 0	1.475 6	1.627
2	12	4		1.496 8	0.213
3	10	4		1.489 7	0.690
4	8	11		1.507 1	0.476
5	6	3		1.521 0	1.400
6	4	6		1.466 1	2.260

注：隐藏层神经元数量由式(12)确定，表中的值对应于预测精度最高的情形。

由表 4 可以看出，在 6 个测点布置方案中，方案 2、3 和 4 的误差均小于 1%，最大误差出现在方案 6，但误差值也不超过 3%。

为了测试 BP 网络的稳定性，进一步对由 XFEM 模拟获得的输入数据添加噪声，即

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{Input}}=\boldsymbol{u}_{\mathrm{XFEM}}(1+\delta) \tag{25}$$

式中：$\boldsymbol{u}_{\mathrm{Input}}$ 为 BP 神经网络输入数据(即输入的测点位移值)；$\boldsymbol{u}_{\mathrm{XFEM}}$ 为 XFEM 正向分析获得的测点位移值；δ 为噪声的大小(百分比)。

图 10 给出了 δ 分别取 1%、2%、5% 和 10% 时 X_A 预测的相对误差绝对值随噪声值的变化情况(测点按图 9 方案 2 布置，隐藏层神经元数量取 4)。可以看出，随着噪声值的增加，裂尖位置预测的相对误差逐渐增大。此外，还可发现当噪声强度等级不大于 5% 时，网络预测的相对误差小于 3%，而当噪声强度等级为 10% 时，相对误差小于 6%，表明 BP 神经网络具有很好容噪性和鲁棒性。

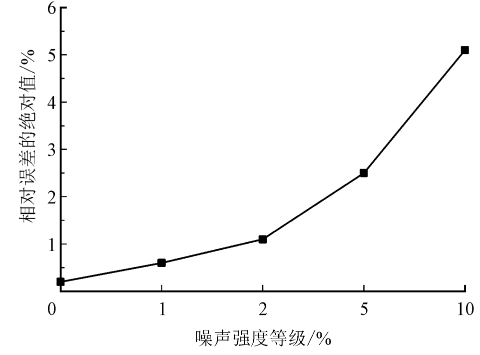


图 10 各噪声下预测 X_A 的相对误差绝对值

Fig. 10 Absolute value of relative error of predicted X_A under various noises

5.2 矩形板内的中心斜裂纹识别

如图 11 所示，矩形板高 $H=2.5$ m，宽 $W=2$ m

板内中心斜裂纹的长度为 a，与 Y 轴的夹角为 β。其他条件均与图 6 相同。

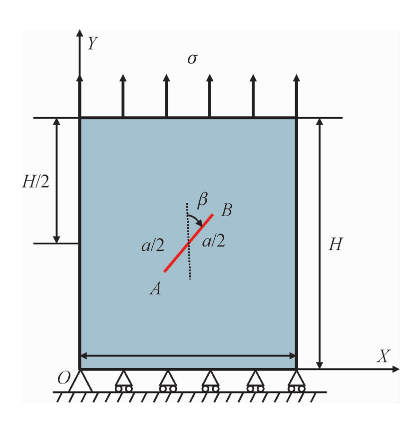


图 11　单向拉伸荷载作用下含中心斜裂纹的矩形板

Fig. 11　A rectangular plate with a central oblique crack under uniaxial tension

5.2.1　XFEM 精度验证

XFEM 模拟时，取 $a=0.5$ m，倾角 β 依次取为 22.5°、45°和67.5°。同样采用四节点矩形单元对板进行离散。图 12 给出了 $\beta=45°$的离散网格，其中包含 500 个单元和 546 个结点。表 5～6 分别给出了裂尖 A 应力强度因子 K_{I} 和 K_{II} 的 XFEM 解及相应的参考解[23]。可以看出，XFEM 解的最大相对误差为 3.644%，其余误差均在 2% 以内，由此可知 XFEM 模拟得到的应力强度因子与参考解吻合的程度很高。

表 5　裂尖 A 的应力强度因子 K_{I}

Tab. 5　K_{I} of crack tip A

裂纹倾角 β/(°)	K_{I}/(MPa · m$^{1/2}$)		相对误差/%
	参考解	数值解	
22.5	0.142 7	0.137 5	3.644
45	0.460 8	0.466 0	1.128
67.5	0.779 9	0.787 9	1.026

表 6　裂尖 A 的应力强度因子 K_{II}

Tab. 6　K_{II} of crack tip A

裂纹倾角 β/(°)	K_{II}/(MPa · m$^{1/2}$)		相对误差/%
	参考解	数值解	
22.5	0.329 7	0.325 1	1.395
45	0.447 5	0.454 9	1.654
67.5	0.314 6	0.316 1	0.477

5.2.2　BP 神经网络的训练和预测结果

1）网络的训练

以 $\beta=45°$为例探讨 BP 神经网络的搭建问题。网络的输入数据仍为 XFEM 模拟得到的测点位移值，输出数据为裂尖 A、B 的坐标，即(X_A，Y_A)和(X_B，Y_B)。XFEM 仿真时采用图 12 的网格，裂纹长度分别取为 0.5、0.528、0.557、0.585、0.613、0.641、0.670 和 0.698 m，12 个测点的布置情况见图 12。据此，网络的输入层、隐藏层和输出层的神经元个数分别取为 12、13 和 2。为验证网络的可靠性，采用训练数据进行裂尖坐标预测，相关结果见表 7 和表 8，可以看出，对给定的 8 种裂纹构型，该网络的预测精度都很高。

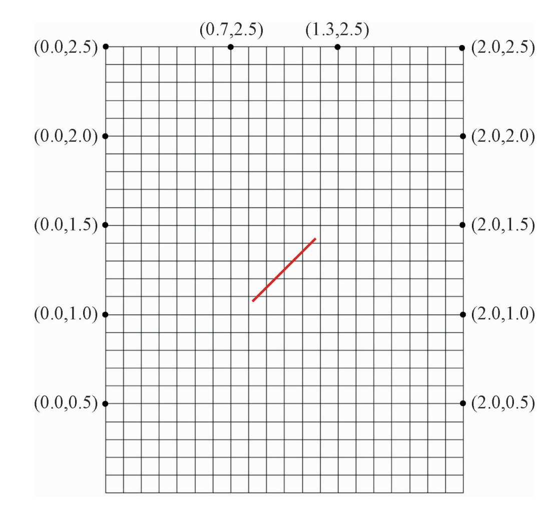


图 12　XFEM 网格和测点布置（$\beta=45°$，$a=0.5$ m）

Fig. 12　XFEM mesh and measuring points ($\beta=45°$, $a=0.5$ m)

表 7　BP 神经网络对裂尖 A 坐标的训练输出结果

Tab. 7　Training results of BP neural network for crack tip A

裂纹长度/m	目标 X_A	训练输出 X_A	目标 Y_A	训练输出 Y_A
0.500	0.823 2	0.823 2	1.073 2	1.073 2
0.528	0.813 2	0.813 3	1.063 2	1.063 2
0.557	0.803 2	0.803 1	1.053 2	1.053 2
0.585	0.793 2	0.793 2	1.043 2	1.043 2
0.613	0.783 2	0.783 3	1.033 2	1.033 2
0.641	0.773 2	0.773 2	1.023 2	1.023 2
0.670	0.763 2	0.763 2	1.013 2	1.013 2
0.698	0.753 2	0.753 2	1.003 2	1.003 2

2）网络的预测精度

基于已搭建好的 BP 神经网络，将 $a=0.726$ m，0.755 m，0.783 m 时由 XFEM 得到的测点位移作为输入数据，分别预测裂尖的坐标值，相应的结果见表 9～10。可以看出，BP 神经网络预测的最大相对误差为 1.137%，表明搭建的网络具有较好的泛化能力。

表8 BP神经网络对裂尖 B 坐标的训练输出结果

Tab. 8 Training results of BP neural network for crack tip B

裂纹长度/m	目标 X_B	训练输出 X_B	目标 Y_B	训练输出 Y_B
0.500	1.176 8	1.176 8	1.426 8	1.426 8
0.528	1.186 8	1.186 7	1.436 8	1.436 8
0.557	1.196 8	1.196 9	1.446 8	1.446 8
0.585	1.206 8	1.206 8	1.456 8	1.456 8
0.613	1.216 8	1.216 7	1.466 8	1.466 8
0.641	1.226 8	1.226 8	1.476 8	1.476 8
0.670	1.236 8	1.236 8	1.486 8	1.486 8
0.698	1.246 8	1.246 8	1.496 8	1.496 8

为进一步测试网络的鲁棒性,仍然对输入数据添加噪声。图13~14给出了噪声值依次取为1%、2%、5%和10%时3种不同裂纹长度(即 $a=0.726$ m,0.755 m,0.783 m)裂尖 A、B 坐标的预测结果及相对误差绝对值的变化情况。可以看出,随着噪声强度等级的增加网络预测的误差也逐渐增大。此外,在同一噪声强度等级下,X_A、X_B 预测的相对误差绝对值随裂纹长度的增大不断增大,而 Y_A、Y_B 预测的相对误差绝对值随裂纹长度的增大逐渐减小;另外,还可以发现裂尖 A 的误差均大于裂尖 B,这可能与约束条件的不对称和裂纹尺寸的影响等因素有关。总体来说,当噪声强度小于5%时,预测结果的误差大都在10%以内,表明搭建的网络具有较好的鲁棒性,但与上例相比,此处噪声对预测精度的影响更为显著,这很可能与裂纹构型的复杂性有关。

表9 BP神经网络对裂尖 A 坐标的预测值和相对误差

Tab. 9 Prediction and relative error of BP neural network for crack tip A

裂纹长度/m	目标 X_A	预测 X_A	相对误差/%	目标 Y_A	预测 Y_A	相对误差/%
0.726	0.743 2	0.737 2	0.806	0.993 2	0.986 8	0.648
0.755	0.733 2	0.731 2	0.268	0.983 2	0.979 8	0.341
0.783	0.723 2	0.729 8	0.910	0.973 2	0.984 3	1.137

表10 BP神经网络对裂尖坐标 B 的预测值和相对误差

Tab. 10 Prediction and relative error of BP neural network for crack tip B

裂纹长度/m	目标 X_B	预测 X_B	相对误差/%	目标 Y_B	预测 Y_B	相对误差/%
0.726	1.256 8	1.262 8	0.476	1.506 8	1.513 2	0.425
0.755	1.266 8	1.268 8	0.154	1.516 8	1.520 1	0.216
0.783	1.276 8	1.270 2	0.514	1.526 8	1.515 9	0.714

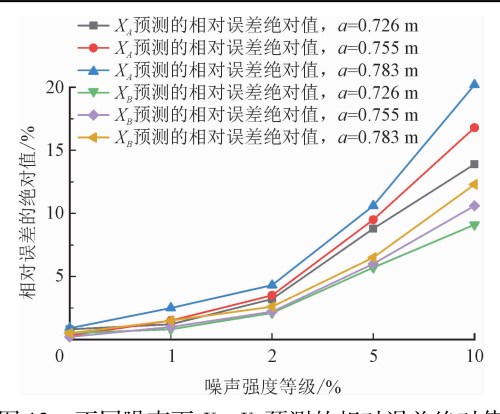


图13 不同噪声下 X_A、X_B 预测的相对误差绝对值

Fig. 13 Absolute value of relative error of X_A and X_B prediction under different noises

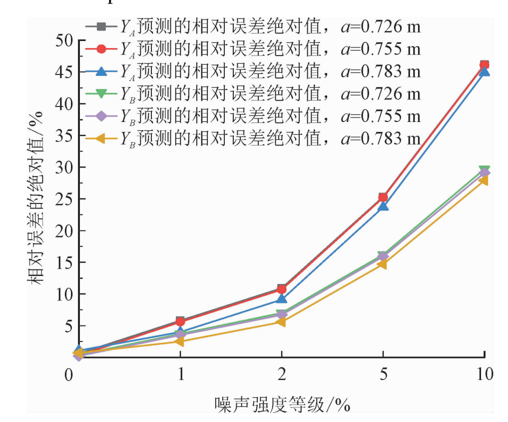


图14 不同噪声下 Y_A、Y_B 预测的相对误差绝对值

Fig. 14 Absolute value of relative error of Y_A and Y_B prediction under different noises

6 结论

通过引入裂面和裂尖改进函数,扩展有限元法可使用较稀疏的固定网格对不断变化的裂纹构型进行高精度模拟。BP神经网络优化算法则具有较强的非线性映射能力、自学习和自适应能力、泛化能力以及容错能力等优点。本研究结合两者的优点,建立了用于结构内部裂纹反演分析的XFEM-BP神经网络方法。在给出XFEM和BP神经网络基本原理的基础上,重点阐述了两者的结合策略和实现流程,最后通过两个典型算例对其精度和鲁棒性等进行了验证,并探讨了网格密度、测点布置和输入数据噪声等对精度的影响。结果表明,XFEM正向分析和BP神经网络的裂纹识别精度均较好,此外搭建的BP神经网络还具有较好的容噪性能。

需要说明的是,虽然具有诸多优点,BP神经网络也存在收敛速度慢和易陷入局部极小值等缺点,为提升BP的性能,可进一步引入其他算法(如GA)

对其进行改进,相关工作正在进行之中。

参考文献:

[1] BOUCHARD P O,BERNACKI M,PARKS D M. Analysis of stress intensity factors and T-stress to control crack propagation for kerf-less spalling of single crystal silicon foils[J]. Computational materials science,2013,69:243-250.

[2] CHEN M,XU Z,FAN X. Evaluation of the T-stress and stress intensity factor for multi-crack problem using spline fictitious boundary element alternating method[J]. Engineering analysis with boundary elements,2018,94:69-78.

[3] 张敦福,张波,王卫东,等. 单向轴压条件下内置椭圆三维裂纹扩展无网格方法的研究[J]. 应用力学学报,2016,33(3):483-489.
ZHANG Dunfu,ZHANG Bo,WANG Weidong,et al. Research on the mesh free method for the propagation of three-dimensional cracks with internal ellipse under uniaxial pressure[J]. Chinese journal of applied mechanics,2016,33(3):483-489(in Chinese).

[4] BELYTSCHKO T,BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. International journal for numerical methods in engineering,1999,45(5):601-620.

[5] RABINOVICH D,DAN G,VIGDERGAUZ S. XFEM-based crack detection scheme using a genetic algorithm[J]. International journal for numerical methods in engineering,2010,71(9):1051-1080.

[6] SURENDRAN M,NATARAJAN S,PALANI G S,et al. Linear smoothed extended finite element method for fatigue crack growth simulations[J]. Engineering fracture mechanics,2018,206:551-564.

[7] MENG Q H,WANG Z Q. Extended finite element method for power-law creep crack growth[J]. Engineering fracture mechanics,2014,127:148-160.

[8] 马永杰,云文霞. 遗传算法研究进展[J]. 计算机应用研究,2012,29(4):1201-1206.
MA Yongjie,YUN Wenxia. The research progress of genetic algorithm[J]. Application research of computers,2012,29(4):1201-1206(in Chinese).

[9] WANG Q,ZENG X. Energy-saving optimisation method for green space planning of urban gardens based on artificial bee colony algorithm[J]. International journal of global energy issues,2020,42(5/6):323-338.

[10] 袁慎芳,李晓泉,陈健. 疲劳裂纹扩展的卷积神经网络辨识[J]. 航空科学技术,2020,31(7):64-71.
YUAN Shenfang,LI Xiaoquan,CHEN Jian. Identification of fatigue crack propagation by convolution neural network[J]. Aeronautical science & technology,2020,31(7):64-71(in Chinese).

[11] 廖贞,杨冰,秦亚航,等. 基于遗传小波神经网络的疲劳短裂纹演变规律研究[J]. 铁道学报,2018,40(5):66-72.
LIAO Zhen,YANG Bing,QIN Yahang,et al. Study on evolution law of short fatigue crack based on genetic wavelet neural network[J]. Journal of the China railway society,2018,40(5):66-72(in Chinese).

[12] WAISMAN H,CHATZI E,SMYTH A W. Detection and quantification of flaws in structures by the extended finite element method and genetic algorithms[J]. International journal for numerical methods in engineering,2010,82(3):303-328.

[13] RABINOVICH D,DAN G,VIGDERGAUZ S. Crack identification by “arrival time” using XFEM and a genetic algorithm[J]. International journal for numerical methods in engineering,2010,77(3):337-359.

[14] 王佳萍,杜成斌,江守燕. 扩展有限元与遗传算法相结合的结构缺陷反演分析[J]. 力学与实践,2017,39(6):591-596.
WANG Jiaping,DU Chengbin,JIANG Shouyan. Analysis of structural defect inversion based on extended finite element and genetic algorithm[J]. Mechanics in engineering,2017,39(6):591-596(in Chinese).

[15] 江守燕,杜成斌. 基于扩展有限元的结构内部缺陷(夹杂)的反演分析模型[J]. 力学学报,2015,47(6):1037-1045.
JIANG Shouyan,DU Chengbin. Back analysis model of internal defects (inclusions) based on extended finite element method[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics,2015,47(6):1037-1045(in Chinese).

[16] SUN H,WAISMAN H,BETTI R. Nondestructive identification of multiple flaws using XFEM and a topologically adapting artificial bee colony algorithm[J]. International journal for numerical methods in engineering,2013,95(10):871-900.

[17] DU C,ZHAO W,JIANG S,et al. Dynamic XFEM-based detection of multiple flaws using an improved artificial bee colony algorithm[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering,2020,365:112995.

[18] 赵子豪. 基于遗传算法-BP 神经网络方法对疲劳短裂纹演化规律的分析[D]. 大连:大连理工大学,2011.

[19] 张慧华. 典型不连续固体力学问题的数值求解[D]. 西安:西安交通大学,2009.

[20] 茹忠亮,朱传锐,张友良,等. 断裂问题的扩展有限元法研究[J]. 岩土力学,2011,32(7):2171-2176.
RU Zhongliang,ZHU Chuanrui,ZHANG Youliang,et al. Study on fracture problems by extended finite element method[J]. Rock and soil mechanics,2011,32(7):2171-2176(in Chinese).

[21] 沈花玉,王兆霞,高成耀,等. BP 神经网络隐含层单元数的确定[J]. 天津理工大学学报,2008(5):13-15.
SHEN Huayu,WANG Zhaoxia,GAO Chengyao,et al. Determination of hidden layer unit number of BP neural network[J]. Journal of Tianjin University of Technology,2008(5):13-15(in Chinese).

[22] 王德明,王莉,张广明. 基于遗传 BP 神经网络的短期风速预测模型[J]. 浙江大学学报(工学版),2012,46(5):837-841.
WANG Deming,WANG Li,ZHANG Guangming. Short term wind speed prediction model based ongenetic BP neural network[J]. Journal of Zhejiang University (engineering science),2012,46(5):837-841(in Chinese).

[23] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 增订版,北京:科学出版社,1993.

(编辑　史淑英)